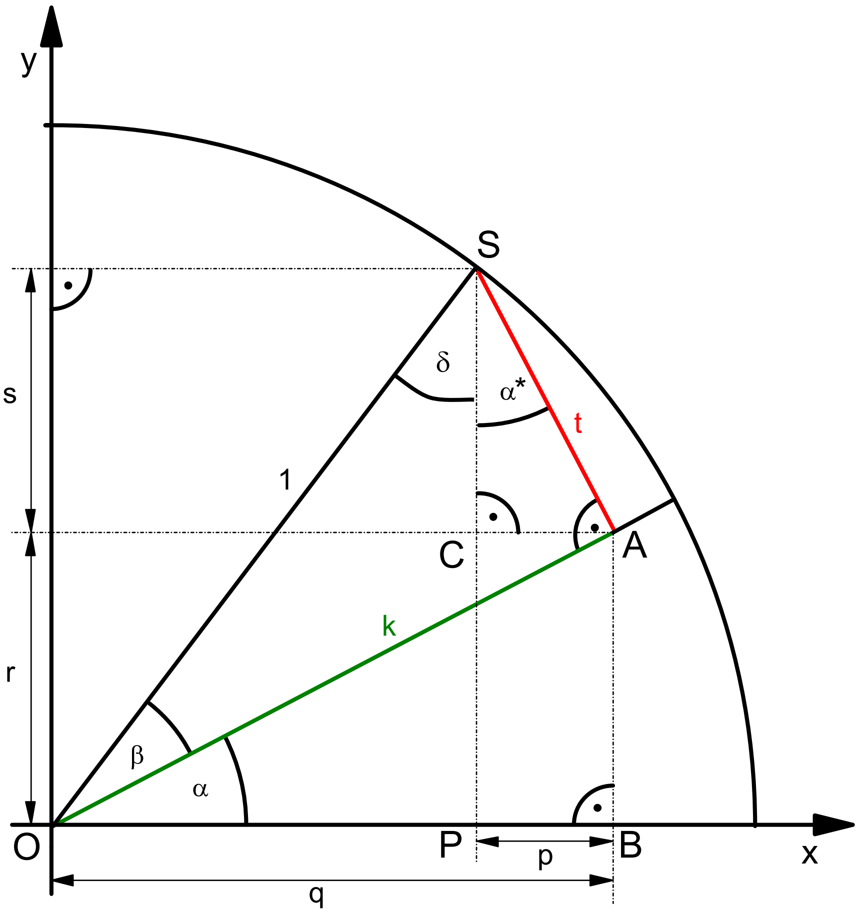
Beweis für die Additionstheoreme der Trigonometrie

Skizze:



Beweis: Die Strecke OS habe die Länge 1 (Einheitskreis), und die Dreiecke OPS, OAS, OBA und CAS seien rechtwinklig.

Damit gilt für die Summe der Winkel: $\alpha + \beta + \delta = 90° = \alpha^* + \beta + \delta$

also: $\alpha^* = \alpha$

Additionstheorem der sin-Funktion:

$$\sin(\alpha+\beta) = r + s$$
$$= \sin\alpha \cdot k + \cos\alpha \cdot t$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta} \quad \textbf{(1)}$$

NR:

Aus den Dreiecken OBA und OAS ergibt sich:

$$r = \sin\alpha \cdot k \qquad ;\text{mit } k = \cos\beta \cdot 1$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

Aus den Dreiecken CAS und OAS ergibt sich:

$$s = \cos\alpha \cdot t \qquad ;\text{mit } t = \sin\beta \cdot 1$$
$$= \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Additionstheorem der cos-Funktion:

$$\cos(\alpha+\beta) = q - p$$
$$= \cos\alpha \cdot k - \sin\alpha \cdot t$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} \quad \textbf{(2)}$$

NR:

Aus den Dreiecken OBA und OAS ergibt sich:

$$q = \cos\alpha \cdot k \qquad ;\text{mit } k = \cos\beta \cdot 1$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Aus den Dreiecken CAS und OAS ergibt sich:

$$p = \sin\alpha \cdot t \qquad ;\text{mit } t = \sin\beta \cdot 1$$
$$= \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Nach **(1)** gilt:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta))$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot (-\sin\beta)$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta} \quad \textbf{(3)}$$

Nach **(2)** gilt:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta))$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot (-\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta} \quad \textbf{(4)}$$

Additionstheorem der tan-Funktion:

mit $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ folgt aus **(3)** und **(4)**:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\frac{\frac{1}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}} \qquad ;\text{ mit } \tan\alpha\cdot\tan\beta \neq -1$$