1. Bringe auf den jeweils in Klammern angegebenen Nenner! Gib auch jeweils den Erweiterungsfaktor an!

   (a) $\dfrac{10}{21a^2b^2c}$ $\quad (126a^4b^3c)$ (b) $\dfrac{-3}{4a-5b}$ $\quad (24a^2b-30ab^2)$

   (c) $\dfrac{2a-b}{a-b}$ $\quad (2b^2-2a^2)$

   Lösung: (a): $\dfrac{60a^2b}{126a^4b^3c}$; EWF$= 6a^2b$ (b): $\dfrac{-18ab}{24a^2b-30ab^2}$; EWF$= 6ab$

   (c): $\dfrac{2b^2-2ab-4a^2}{2b^2-2a^2}$; EWF$= -2\cdot(a+b)$

2. Mache die beiden Bruchterme gleichnamig!

   $$\frac{x+3}{2x-6} \text{ und } \frac{15}{9-x^2}$$

   Lösung: $\dfrac{-(x+3)^2}{18-2x^2}$ und $\dfrac{30}{18-2x^2}$

3. Kürze vollständig:

   $$\frac{-a^2+a^3+2ab-2a^2b-b^2+ab^2}{a^2-ab-a+b}$$

   Lösung: $a-b$

4. Kürze soweit wie möglich: $\dfrac{60\,a\,x-45\,b\,x+24\,a\,y-18\,b\,y}{24\,a\,x+60\,a\,y-18\,b\,x-45\,b\,y}$

   Lösung: $\dfrac{5\,x+2\,y}{2\,x+5\,y}$

5. Bestimme die Definitionsmenge und kürze soweit wie möglich:

   $$\frac{x-1}{2x^3-4x^2+2x}$$

   Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$; $\frac{1}{2x(x-1)}$

6. Kürze soweit wie möglich:

   $$\frac{8v^3-24uv^2+18u^2v}{18u^3-8uv^2}$$

   Lösung: $\frac{v(3u-2v)}{u(3u+2v)}$

7. Kürze vollständig:

$$\frac{12x^2 - 108y^2}{24x^2y - 36xy^2 - 4x^3}$$

Lösung: $\frac{3(3y+x)}{x(3y-x)}$

8. Bestimme die Definitionsmenge des Terms und kürze ihn vollständig:

$$\frac{45x^2 + 30x^3}{12x^3 - 27x}$$

Lösung: $D = \mathsf{Q} \setminus \{0; \pm\frac{3}{2}\}$, Ergebnis: $\frac{5x}{2x-3}$

9. Kürze vollständig:

$$\frac{9xy^2 - 6x^2y - 6x^2y^2 + 4x^3y}{24x^3y - 81y - 16x^4 + 54x}$$

Lösung: $\dfrac{-xy}{4x^2 + 6x + 9}$

10. Kürze den Term soweit wie möglich:

$$\frac{(2f - 9)(4x^2 + 20x + 25)}{36x - 8xf + 90 - 20f}$$

Lösung: $-\frac{2x+5}{2}$

11. Kürze soweit wie möglich und gib die Definitionsmenge D_0 des ungekürzten sowie D_1 des gekürzten Bruches an:

$$\frac{(x^4 - 1)\,(x^2 - 6\,x + 9)}{(x^2 - 1)\,(x^2 - 9)}$$

Lösung: $\dfrac{\left(x^2 + 1\right)(x - 3)}{x + 3} = \dfrac{x^3 - 3\,x^2 + x - 3}{x + 3}$
$D_0 = \mathsf{Q}\setminus\{-3\,;\,-1\,;\,1\,;\,3\}\quad;\quad D_1 = \mathsf{Q}\setminus\{-3\}$

12. Bestimme die Definitionsmenge D des Terms $T(x)$ und kürze den Term vollständig $(G = \mathbb{Q})$! Gib auch für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

   (a) $T(x) = \dfrac{8x^4 + 24x^3 + 18x^2}{12x^3 - 27x}$

   (b) $T(x) = \dfrac{15x^2 - 20x}{48x - 27x^3}$

Lösung: (a) $T^*(x) = \dfrac{2x(2x+3)}{3(2x-3)}$, $\quad D = \mathsf{Q} \setminus \{-\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2}\}$, $\quad D^* = \mathsf{Q} \setminus \{\dfrac{3}{2}\}$

(b) $T^*(x) = -\dfrac{5}{3(3x+4)}$, $\quad D = \mathsf{Q} \setminus \{-\dfrac{4}{3}, 0, \dfrac{4}{3}\}$, $\quad D^* = \mathsf{Q} \setminus \{-\dfrac{4}{3}\}$

13. Kürze folgenden Term vollständig!

$$\frac{49ab^2 - 25a^3}{50a^3 - 140a^2b + 98ab^2}$$

Lösung: $\dfrac{7b + 5a}{2(7b - 5a)}$

14. Bestimme die Definitionsmenge D des Terms $T(x)$ und kürze den Term vollständig! Gib auch für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

    (a) $T(x) = \dfrac{12x^3 - 60x^2 + 75x}{8x^4 - 50x^2}$

    (b) $T(x) = \dfrac{20x^2 - 12x}{27x - 75x^3}$

Lösung: (a) $\dfrac{3(2x-5)}{2x(2x+5)}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\}$ $\quad D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$

(b) $-\dfrac{4}{3(5x+3)}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{5}, 0, \frac{3}{5}\}$ $\quad D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{5}\}$

15. Kürze folgenden Term vollständig!

$$\frac{36b^3 - 25a^2b}{50a^2b - 120ab^2 + 72b^3}$$

Lösung: $\dfrac{6b + 5a}{2(6b - 5a)}$

16. Kürze vollständig!

$$\frac{40a^2b - 120ab^2 + 90b^3}{45ab^3 - 20a^3b}$$

Lösung: $\dfrac{2(3b - 2a)}{a(3b + 2a)}$

17. (a) Bestimme die Definitionsmenge D für den Term

$$T(x) = \frac{24x^2 + 6 - 24x}{12x^2 - 3}$$

    (b) Kürze den Bruchterm vollständig und gib für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

(b) $T(x) = \frac{2(2x-1)}{2x+1}$, $D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

18. (a) Bestimme die Definitionsmenge D ($G = \mathbb{Q}$) für den Term

$$T(x) = \frac{36x^2 + 4 - 24x}{18x^2 - 2}$$

(b) Kürze den Bruchterm vollständig und gib für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

Lösung: (a) $D = \mathsf{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$
(b) $T(x) = \frac{2(3x-1)}{3x+1}$, $D^* = \mathsf{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

19. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\left[\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) : \left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{ax}\right)\right] \cdot \frac{x^2 - y^2}{abx - a^2y}$$

Lösung: $y - x$

20. Berechne und vereinfache soweit wie möglich:

$$\left(\frac{1-x}{3y-8x} - \frac{x-1}{3y+8x}\right) : \left(\frac{1}{8x^2 - 3xy} \cdot \frac{6x}{y}\right)$$

Lösung: $\frac{y^2(x-1)}{8x+3y}$

21. Vereinfache soweit wie möglich: $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$

Lösung: $-\dfrac{x^2 + y^2}{x^2\, y^2}$

22. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{1}{2x} - \frac{x^2 + xy - x - y}{2x^3 - 8x} : \frac{x-1}{8-4x}$$

Lösung: $\dfrac{5x + 4y + 2}{2x \cdot (x+2)}$

23. Vereinfache soweit wie möglich!

$$\left(\frac{b-4a}{b+4a} + \frac{16ab}{b^2 - 16a^2}\right) : \frac{4a+b}{16a^2 - 8ab + b^2}$$

Lösung: $b - 4a$

24. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung über $G = \mathbb{Q}$:

$$2 - \frac{2}{x} - \frac{4x}{2x+1} = 0$$

Lösung: $D = \mathsf{Q} \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$, $L = \{-1\}$

25. Bestimme jeweils Definitions- und Lösungsmenge:

    (a) $x - 2 - \dfrac{4}{x-2} = x \cdot \dfrac{x-4}{x-2}$

    (b) $\dfrac{-3x}{x+3} = \dfrac{-21}{x^2+3x} - \dfrac{3x-7}{x}$

    (c) $\dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{x-3}{2x-1}$

Lösung: (a) $D = \mathsf{Q} \setminus \{2\}$, $L = D$
(b) $D = \mathsf{Q} \setminus \{0; -3\}$, $L = \{\}$
(c) $D = \mathsf{Q} \setminus \{0,5; -1,5\}$, $L = \{-4,5\}$

26. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{2x}{3x-9} + \frac{2x-10}{12-4x} - \frac{x+3}{6x} = 0, \quad G = \mathbb{Q}$$

Lösung: $G = \mathsf{Q} \setminus \{3; 0\}$, $L = \{-\frac{3}{5}\}$

27. Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge des angegebenen Bruchterms:

$$-\frac{2}{t+3} + \frac{4t+1}{t^2-9} - \frac{2t-5}{2t-6} = -1$$

Lösung: $D = \mathsf{Q} \setminus \{-3; 3\}$; $L = \{-\frac{11}{3}\}$

28. Gib die Definitionsmenge an und berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{4\,x^2-81} - \frac{14-3\,x}{6\,x-27} = \frac{2\,x-1}{4\,x+18}$$

Lösung: $D = \mathsf{Q}\setminus\{-\frac{9}{2}\,;\,\frac{9}{2}\}$; $x = \frac{9}{2} \notin D \implies L = \{\}$

29. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge über $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x}{4x-6} - \frac{x+5}{6x+9} = 2 - \frac{17x^2-4}{12x^2-27}$$

Lösung: $G = \mathsf{Q} \setminus \{\pm\frac{3}{2}\}$, $L = \{-10\}$

30. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge:

$$\frac{3x}{3x+2} - \frac{2-3x}{9x^2+12x+4} = 1$$

Lösung: $D = \mathsf{Q} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$, $L = \{-2\}$

31. Gib für folgende Gleichung die Definitions- und die Lösungsmenge an $(G = \mathbb{Q})$!

$$\frac{5x+2}{36-12x} - \frac{15}{6x^2-54} = \frac{5x+20}{12x+36} - \frac{5}{6}$$

Lösung: $D = \mathsf{Q} \setminus \{-3; 3\}$, $L = \{\}$

32. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an $(G = \mathbb{Q})$!

$$\frac{5x+10}{12x+18} - \frac{5}{6} = \frac{5x+1}{18-12x} - \frac{5}{8x^2-18}$$

Lösung: $D = \mathsf{Q} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$, $L = \{\}$